e-Funktionen in der Physik (18.5.19)

In der Physik werden e-Funktionen benutzt, um einen zeitlichen exponentiellen Anstieg oder –Abfall zu beschreiben.
Damit startet man meist zum Zeitpunkt t=0 und schaut sich die Entwicklung an.

Allgemein kann man sagen:

- Für alle e-Funktionen ist A_0 der Startwert. Bei diesem Wert startet man bei t=0.
- In der Physik unterscheidet man am besten den exponentiellen Anstieg und den exponentiellen Abfall.
- Den Wert τ nennt man die Zeitkonstante. Er wird am besten für Anstieg und Abfall getrennt erklärt.
- Eine dritte, weniger häufig Variante der e-Funktion ist der exponentielle Anstieg von 0 auf einen Endwert A_0.

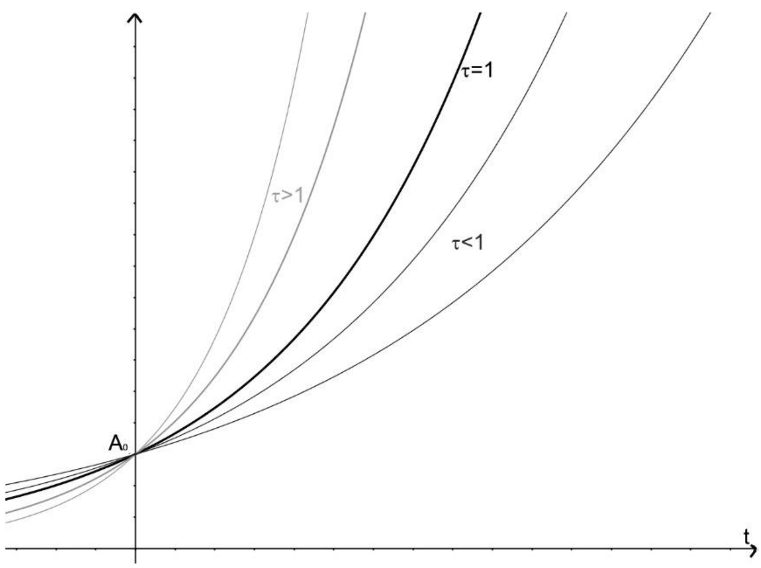
1. Exponentieller Anstieg:

$$f(t) = A_0 e^{\frac{t}{\tau}}$$

Hier gibt τ an, nach welcher Zeit die Funktion um das e-fache angestiegen ist.
In der Funktion ist dann $\frac{t}{\tau} = 1$ d.h. $f(t) = A_0 \cdot e^1 = A_0 \cdot e$.

Gezeichnet sieht die Funktion so aus:

- Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist A_0
- Je größer τ, desto steiler der Anstieg. Das heißt:
  - τ=1 ist die „Normalform“ (Schwarz im Diagramm)
  - Für τ>1 steigt die Funktion stärker an.
  - Für τ<1 steigt die Funktion schwächer an.



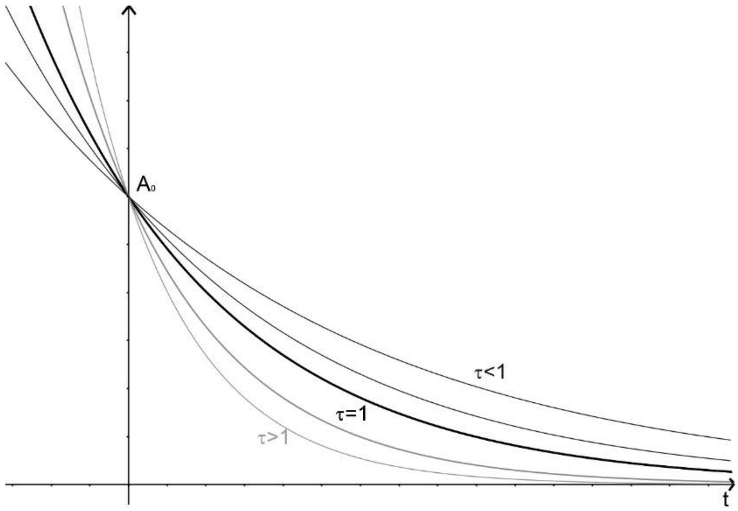
2. <u>Exponentieller Abfall:</u>

$$f(t) = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Hier gibt τ an, nach welcher Zeit die Funktion auf den $\frac{1}{e}$-ten Teil abgefallen ist. In der Funktion ist dann $\frac{t}{\tau} = 1$ d.h. $f(t) = A_0 \cdot e^{-1} = \frac{A_0}{e}$.

Gezeichnet sieht die Funktion so aus:

- Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist A_0
- Je größer τ, desto steiler der Abfall. Das heißt:
  - τ=1 ist die „Normalform“
  - Für τ>1 fällt die Funktion stärker ab.
  - Für τ<1 fällt die Funktion schwächer ab.

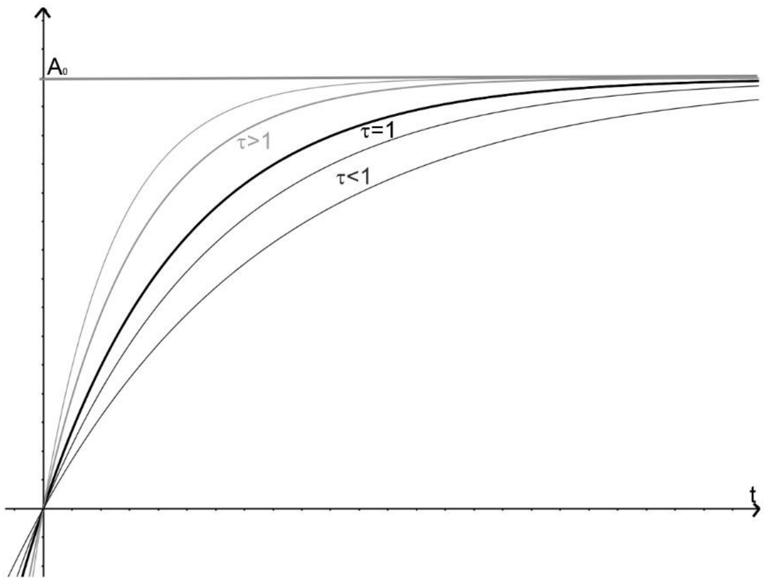


3. <u>Exponentieller Anstieg von 0 auf einen Endwert:</u>

$$f(t) = A_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Gezeichnet sieht die Funktion so aus:

- Sie startet bei 0, steigt erst steil und dann flacher an.
- Sie nähert sich immer mehr dem Endwert A_0, erreicht ihn aber nie.
- Je größer τ, desto schneller verläuft der Anstieg. Das heißt:
  - τ=1 ist die „Normalform“
  - Für τ>1 steigt die Funktion schneller an.
  - Für τ<1 steigt die Funktion weniger schnell an.



Bestimmung einer Funktionsgleichung aus Messwerten

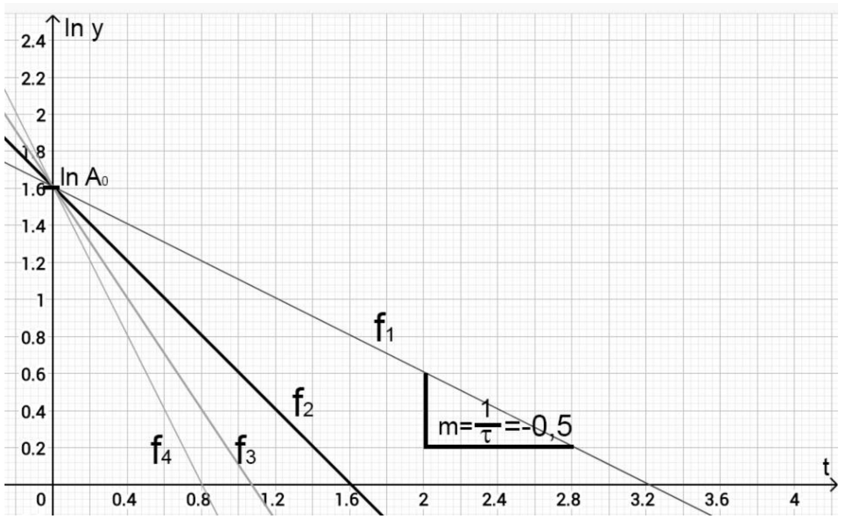
In einem Diagramm lassen sich Geraden am einfachsten auswerten. Deshalb wäre es schön, wenn man aus der Exponentialfunktion eine Gerade machen könnte.
Das geht tatsächlich und ist nicht mal schwer. Für einen exponentiellen Abfall zum Beispiel nimmt man einfach den natürlichen Logarithmus der Funktion und formt ein bisschen um:

$$y = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\ln y = \ln(A_0 e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\ln y = \ln A_0 - \frac{1}{\tau} \cdot t$$

$$\ln y = -\frac{1}{\tau} \cdot t + \ln A_0$$



Praktisch heißt das: Man kann in einem Diagramm statt y einfach ln y auftragen. Der Graph ist dann eine Gerade mit der Steigung $m=-\frac{1}{\tau}$ und dem Achsenabschnitt $n=\ln A_0$. Das Ergebnis sieht man in der Abbildung.
Man kann also im Diagramm die Steigung und den Achsenabschnitt ablesen und danach die Funktionsgleichung f(t) hinschreiben.

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Steigungen und den Achsenabschnitt der Geraden im Diagramm und stellen Sie die Funktionsgleichungen auf. Geben Sie jeweils auch die Zeitkonstante an.

Aufgabe 2:
In einer Messung soll die Funktionsgleichung eines exponentiellen Abfalls bestimmt werden. Die Messwerte befinden sich in der Tabelle.

x	1	2	3	4	5	6
y	3,70	2,74	2,03	1,51	1,12	0,82
ln y						

a) Berechnen Sie ln y und füllen Sie die fehlende Spalte aus.
b) Tragen Sie x und ln y in ein Diagramm ein, bestimmen Sie die Steigung und den Achsenabschnitt. Geben Sie die Funktionsgleichung und die Zeitkonstante an.

Kontrollergebnisse:

Aufgabe 1: $y_1 = 5e^{-0,5x}$ $\tau=2$ $y_2 = 5e^{-x}$ $\tau=1$ $y_3 = 5e^{-1,5x}$ $\tau=2/3$ $y_3 = 5e^{-2x}$ $\tau=0,5$	Aufgabe 2: $y = 5e^{-0,3x}$ $\frac{10}{3}$