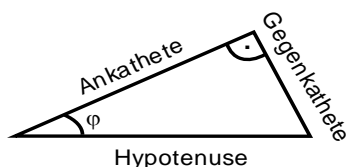


Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck (18.4.19)



$$\sin \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Winkel im Bogenmaß

Wenn es um Schwingungen und Wellen geht, werden Winkel immer im Bogenmaß gemessen. Eine komplette Umdrehung hat dann nicht 360° . Hier ist der Drehwinkel $2 \cdot \pi$.

Eine halbe Drehung (180°) hat dann den Drehwinkel π . Man kann für jeden Drehwinkel in Grad den Drehwinkel im Bogenmaß ausrechnen:

Wichtige Winkel im Bogenmaß		
Drehung um	Bogenmaß	Grad
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \pi$	90°
$\frac{1}{2}$	π	180°
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2} \pi$	270°
1	2π	360°

$$\frac{\text{Winkel in Grad}}{360^\circ} = \frac{\text{Winkel im Bogenmaß}}{2\pi}$$

Der Taschenrechner kann Winkel im Bogenmaß angeben, er muss allerdings dafür eingestellt werden. Das geschieht beim TIInspire unter Menü/Einstellungen/Grafik Winkel.

Wenn du testen willst, ob dein Taschenrechner die Winkel im Bogenmaß oder im Gradmaß rechnet, gibt es einen einfachen Trick:

Im Gradmaß ist $\sin(90^\circ) = 1$

Im Bogenmaß ist $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Du kannst also beides in den Taschenrechner eintippen und schauen, wo 1 herauskommt.

Sinus und Cosinus als Funktion

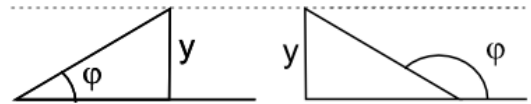
Man kann das rechtwinklige Dreieck auch so drehen, dass die Ankathete unten ist und die Gegenkathete senkrecht nach oben steht.

Wichtig: Wir betrachten das Dreieck, in dem die Länge der Hypotenuse 1 ist.

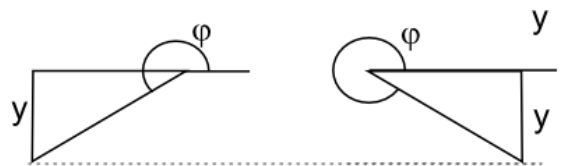
Wenn man den Winkel φ ändert, verändert sich auch die Höhe der Gegenkathete. Wir nennen die Höhe der Gegenkathete y . In diesem speziellen Fall ist $y = \sin(\varphi)$.

Man kann für den Winkel φ auch Werte größer als 90° nehmen und ein rechtwinkliges Dreieck dazu zeichnen. Auch hier bekommt man y -Werte für die Höhe der Gegenkathete. Dabei fallen ein paar besondere Dinge auf.

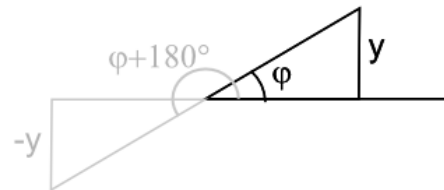
- Wenn φ größer als 90° ($\frac{\pi}{2}$) wird, geht das Dreieck von der Spitze nach links. Die Zahlenwerte von y wiederholen sich dabei.



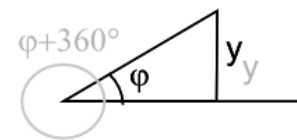
- Wenn φ größer als 180° (π) wird, dann geht die Gegenkathete nach unten. Der Sinus ist dann negativ. Auch ab 270° wiederholen sich die Zahlenwerte von y .



- Wenn der Winkel φ um genau 180° (π) vergrößert wird, erhält man für den Sinus denselben Wert. Nur negativ.



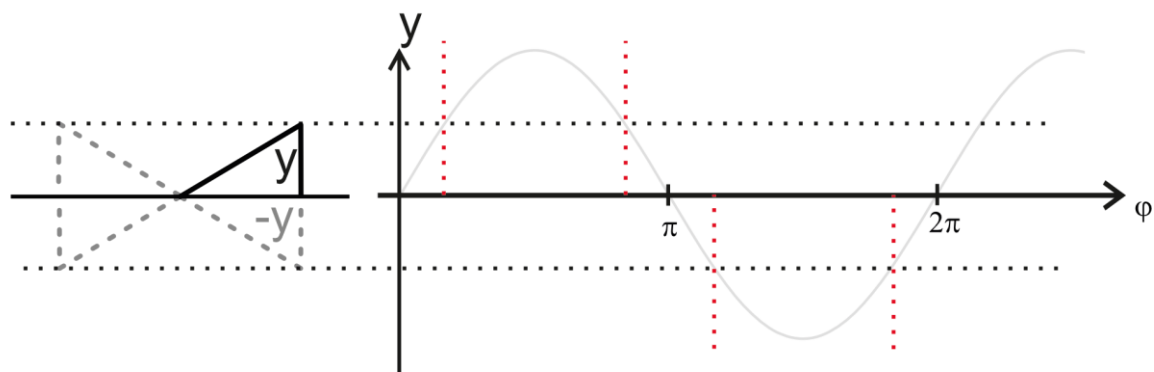
- Wenn man den Winkel φ um 360° (2π) vergrößert, dann hat man eine vollständige Drehung gemacht und der Wert von $\sin \varphi$ ist wieder gleich. Die Werte von $\sin \varphi$ wiederholen sich also mit einer Periode von 360° (2π).



Man kann die Werte für φ und y als Wertepaar (φ/y) in ein Koordinatensystem eintragen. Dann bekommt man die Funktion

$$y = \sin(\varphi)$$

Wie die Höhe der Gegenkathete wiederholt sich auch die Sinuskurve mit einer Periode von 360°



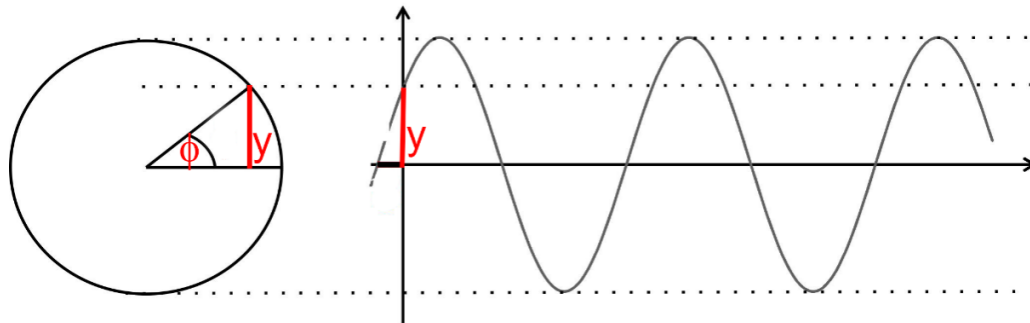
Was haben das rechtwinklige Dreieck und der Sinus mit Schwingungen zu tun?

Wenn man im Physikunterricht mit dem Thema Schwingungen startet, wird meist als erstes ein Versuch gemacht, bei dem der Schatten einer Kreisbewegung und einer schwingenden Feder an die Wand projiziert werden. Den Versuch findet man auch auf youtube. Entweder imter dem Link unten oder, indem man „kreisbewegung schwingung“ als Suchbegriff eingibt.

<https://www.youtube.com/watch?v=ZZiE8KbkTuw>

Dann sieht man, dass die Schattenbewegungen identisch sind. Jede Schwingung kann also beschrieben werden durch die Höhe eines kreisenden Körpers, der sich um einen Winkel φ gedreht hat. Das Dreieck in der Zeichnung unten ist dasselbe wie auf der Seite vorher.

Alles, was man jetzt noch tun muss, ist die physikalischen Größen (Schwingungsdauer, Amplitude, Winkelgeschwindigkeit, Phasenverschiebung) mit den mathematischen Größen in der Sinusfunktion zu vergleichen.



ACHTUNG!!

Der Winkel φ wird bei Schwingungen und Wellen nicht immer mit der gleichen Bedeutung benutzt. Bisher war φ ganz allgemein der Winkel im Dreieck bzw. der Drehwinkel im Kreis. Die dazugehörige allgemeine Gleichung lautet für einen Kreis mit dem Radius r :

$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$

Wenn man dagegen einer schwingenden Feder zusieht, will man die Höhe des schwingenden Gewichtes zu einem bestimmten Zeitpunkt wissen. Dazu muss man auch wissen, auf welcher Höhe y_0 die Schwingung gestartet hat. Dazu gehört am Kreis ein Startwinkel φ_0 .

Die 0 im Index steht dafür, dass hier zum Zeitpunkt $t=0$ gemessen wird. Danach ändern sich sowohl y als auch φ kontinuierlich.

Meistens wird die 0 beim Schreiben weggelassen. Dann schreibt man (siehe nächste Seite)

$$y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Wenn man verstanden hat, wie Schwingungen funktionieren, kann man auch sofort sehen, welche Bedeutung φ hat. Man muss nur ein bisschen aufpassen, damit man nicht in die falsche Formel einsetzt.

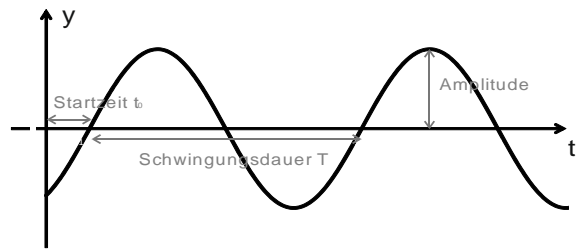
Schwingungen

Allgemein: Jede Schwingung kann mithilfe der Funktion

$$y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

beschrieben werden.

- \hat{y} ist die Amplitude.
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ heißt Winkelgeschwindigkeit.
- T ist die Schwingungsdauer.
- t_0 ist die Startzeit.
- Die Phasenverschiebung φ gibt an bei welchem Drehwinkel die Schwingung startet.
- Aus der Phasenverschiebung φ kann man die Startzeit t_0 ausrechnen: $\frac{t_0}{T} = \frac{\varphi}{2\pi}$.

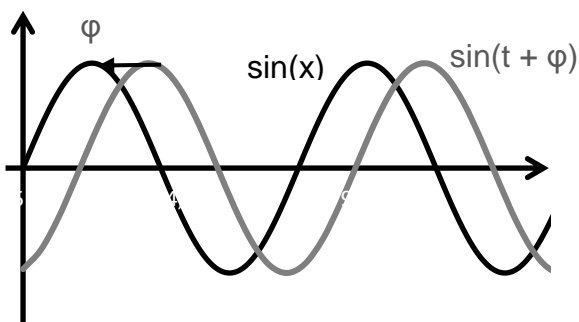


Einfluss der Phasenverschiebung φ : $y = \sin(t + \varphi)$

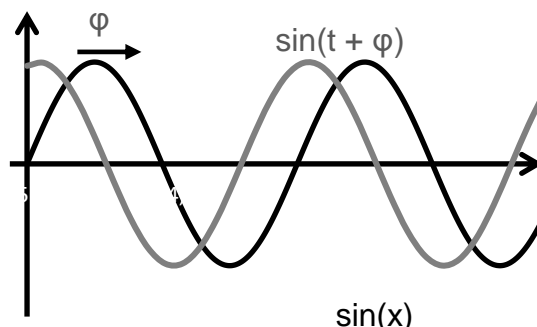
(1) Die Phasenverschiebung findet man anschaulich durch den Vergleich der Schwingung mit der Drehung einer Kreisscheibe um den Winkel φ (siehe Seiten vorher)

Der Graph zu $y = \sin(t + \varphi)$ entsteht aus dem Graphen zu $y = \sin(x)$ durch Verdrehen um φ entgegen der dem Uhrzeigersinn. Für die Schwingung heißt das, die Funktion startet um eine Zeit $t_0 = \frac{\varphi T}{2\pi}$ früher.

Wenn $\varphi > 0$, wird nach links verschoben.



Wenn $\varphi < 0$, wird nach rechts verschoben.



(2) Die Periode ist 2π , weil $\omega = 1$. Das entspricht anschaulich der Schwingungsdauer $T = 2\pi$.

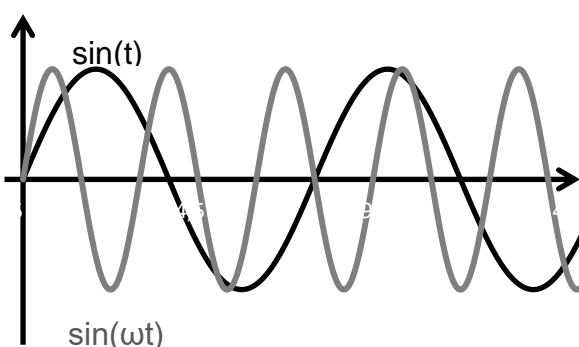
(3) Die Funktion hat den Wertebereich $[-1; 1]$, weil die Amplitude $\hat{y} = 1$ ist.

(4) Die Funktion hat Nullstellen bei $k \cdot \pi - \varphi$ für alle ganzzahligen k .

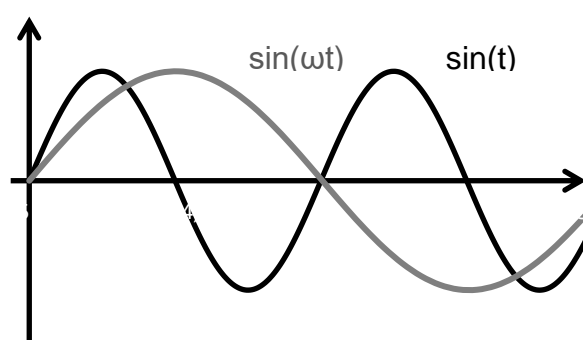
Einfluss der Winkelgeschwindigkeit ω : $y = \sin(\omega t)$

(1) Der Graph zu $y = \sin(\omega t)$ entsteht aus dem Graphen zu $y = \sin(t)$ durch Strecken mit dem Faktor $\frac{1}{\omega}$ in Richtung der Zeitachse. Anschaulich ändert sich dabei die Schwingungsdauer

Für $\omega > 1$



Für $0 < \omega < 1$



(2) Die Schwingungsdauer ist $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

(3) Die Funktion hat den Wertebereich $[-1; 1]$.

(4) Die Funktion hat die Nullstellen: $k \cdot \frac{\pi}{\omega}$ für ganzzahlige k .

Wellen

Wellen sind sehr komplexe Gebilde, weil sie sich mit der Zeit verändern und dazu noch im Raum fortbewegen. Man kann aber mit einer Kamera ein Foto von einer Welle machen und dann die Form der Welle auf dem Foto betrachten. Dabei muss man drei Größen im Auge behalten:

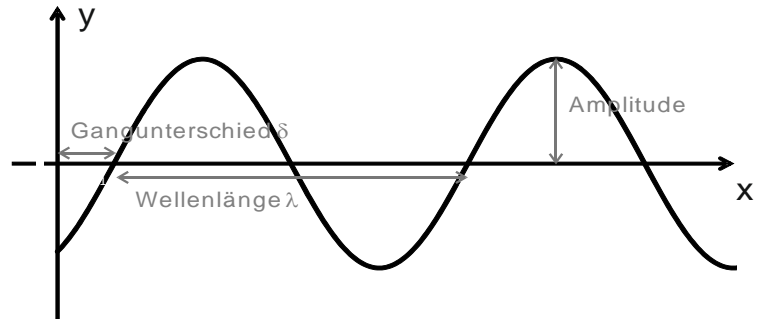
- Wellenlänge λ
- Gangunterschied δ
- Amplitude \hat{y}

Die Funktionsgleichung der Welle lautet dann

$$y(x) = \hat{y} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$$

Der Gangunterschied δ gibt die Verschiebung der Welle in x-Richtung an. Wenn man den Phasenwinkel φ kennt, kann man ihn ausrechnen:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda}$$



Wellen und Schwingungen selbst zeichnen

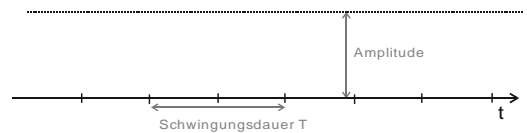
Meistens muss man nur einzelne Wellen und Schwingungen zeichnen. Dann kann man die Achsen so wählen, dass sie passen. Das funktioniert sogar, wenn man für die Wellenlänge, Schwingungsdauer und die Amplitude keine konkreten Zahlen hat.

Beispiel Schwingung:

Für das Diagramm sind Schwingungsdauer, Anfangszeit und Amplitude wichtig. Da die Schwingung periodisch ist, reicht es erst mal, wenn man die Längsachse (t-Achse) und die Amplitude aufzeichnet. Die Hochachse (y-Achse) kann später kommen. Sie verändert die Schwingung nicht, sondern legt nur die Startzeit fest.

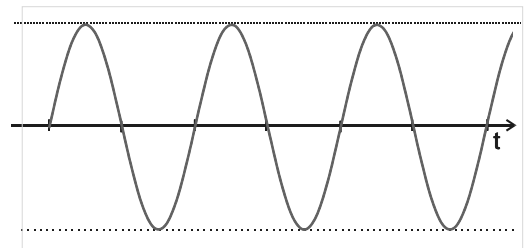
Schritt 1: Eine Sinusschwingung hat jede halbe Schwingungsdauer einen Nulldurchgang. Außerdem ist die Amplitude konstant.

- Zeichnen Sie zuerst die t-Achse und markieren Sie die Nullstellen.
- Zeichnen Sie zwei gestrichelte Linien, die die Amplitude markieren.



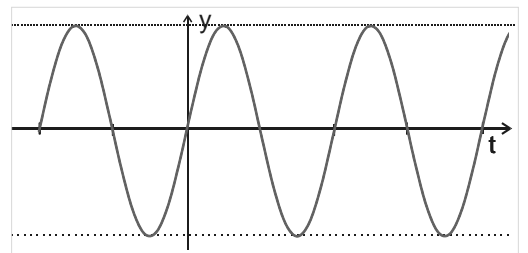
Schritt 2:

- Zeichnen Sie die Sinusschwingung so, dass sie durch die markierten Nullstellen geht und die gegebene Amplitude hat.



Schritt 3: Der Startzeitpunkt t_0 gibt an, um wieviel die Sinusschwingung verschoben ist. Für $t_0=0$ ist die Sinusfunktion nicht verschoben.

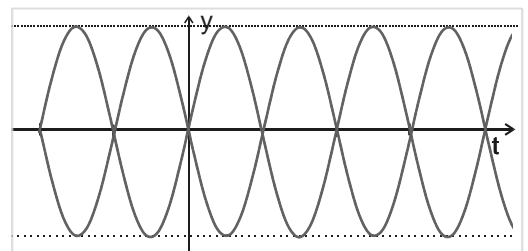
- Zeichnen Sie die y-Achse so ein, dass der Startzeitpunkt passt.



Schritt 3: Will man weitere Wellen in das Diagramm zeichnen, so muss man sich sofort über den Startzeitpunkt Gedanken machen. Außerdem kann sich die Wellenlänge ändern.

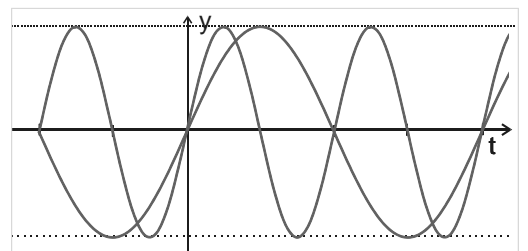
Fall 1: Der Startzeitpunkt ist anders.

- Berechnen Sie aus φ den Startzeitpunkt t_0 . Für $\varphi = \pi$ zum Beispiel ist die Welle um eine halbe Periode verschoben. $t_0 = \frac{T}{2}$
- Zeichnen Sie die verschobene Welle ein.



Fall 2: Die Schwingungsdauer ist anders.

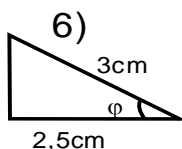
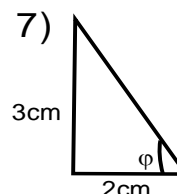
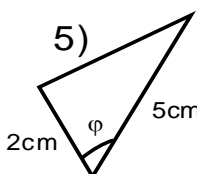
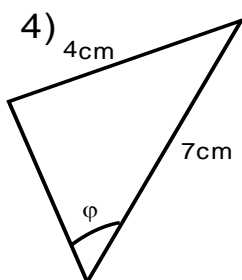
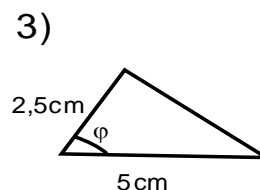
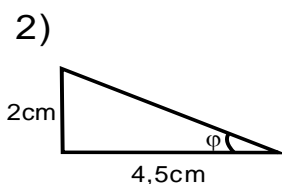
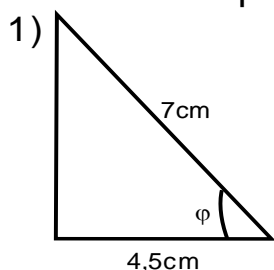
- Zeichnen Sie die Nullstellen für die geänderte Schwingungsdauer ein. Hat sich die Schwingungsdauer zum Beispiel verdoppelt, so sind die Nullstellen doppelt so weit auseinander.



Aufgaben zu Schwingungen und Wellen

Aufgabe 1: (zu Seite 1)

Berechnen Sie für die folgenden Dreiecke die fehlende Seite und den eingezeichneten Winkel φ



Aufgabe 2: Winkel im Bogenmaß (zu Seite 1)

a) Füllen Sie die folgende Tabelle vollständig aus. Rechnen Sie dazu die Winkel um.

φ in Grad	10	30	200	150				
φ im Bogenmaß					$0,1 \cdot \pi$	1	2	$\frac{5}{3} \pi$

b) Berechnen Sie für alle Winkel einmal den Sinus und den Cosinus im Bogenmaß und einmal in Grad. Wenn Sie es richtig machen, muss dasselbe herauskommen.

Aufgabe 3: Zusammenhang zwischen Kreis und Sinus (zu Seite 2)

a) Rechnen Sie die Winkel von 30° , 60° , 90° und 180° ins Bogenmaß um. Geben Sie keine Dezimalzahl sondern das Vielfache der Zahl π an (Beispiel: $45^\circ = \frac{\pi}{4}$)

b) Geben Sie ohne Taschenrechner für die Winkel von $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{\pi}{3}$ alle weiteren Winkel (kleiner 2π) an, für die der Sinus den gleichen Betrag hat. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Taschenrechner. (Betrag heißt: Die Zahl muss die Gleiche sein, das Vorzeichen ist egal.)

Aufgabe 4: Schwingungen mit dem GTR zeichnen. (zu Seite 4)

Stellen Sie den GTR auf Bogenmaß. Definieren Sie am GTR die Variable $\varphi:=0$ und $\omega:=1$

- Zeichnen Sie die Funktion der Schwingung $y = \sin(\omega \cdot x + \varphi)$. Geben Sie Amplitude und Schwingungsdauer an. Überprüfen Sie, ob gilt: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Verändern Sie ω so, dass $T=2s$. Überprüfen Sie die neue Schwingungsdauer am GTR.
- Verschieben Sie die Schwingung, indem Sie $\varphi:=1$; $\varphi:=2$; $\varphi:=4$; $\varphi:=6$ setzen. Beobachten Sie das Resultat am GTR. Lesen Sie die Verschiebung ab und überprüfen Sie, ob gilt: $t_0 = \frac{\varphi}{2\pi} T$.
Dann setzen Sie $\varphi:= -1$; ... und vergleichen Sie.
- Finden Sie das φ , für das die Welle um eine Viertel / eine halbe / eine dreiviertel und eine ganze Schwingung verschoben ist. Es gibt für jede Frage eine exakte Antwort! Nicht schätzen.

Aufgabe 5: Schwingungen von Hand zeichnen. Hier den GTR nicht benutzen.

(Zu Seite 4 und 6)

Für alle Schwingungen sei die Amplitude $\hat{y} = 1$.

- Zeichnen Sie eine Schwingung mit Schwingungsdauer 5s und Startzeitpunkt $t_0=0$.
- Zeichnen Sie ins selbe Diagramm eine Schwingung mit der gleichen Schwingungsdauer, die aber um eine halbe/eine viertel/drei viertel Schwingungsdauer nach rechts verschoben sind.
- Geben Sie für alle Schwingung aus b) den Startzeitpunkt und den Phasenwinkel φ an.
- Zeichnen Sie eine Schwingung, die gegen die aus a) um $\varphi = -\frac{\pi}{2} / \frac{\pi}{2} / 2\pi$ verschoben ist. Geben Sie jeweils t_0 an.

Aufgabe 6: (zu Seite 5 und 6)

Wellen von Hand zeichnen. Hier den GTR nicht benutzen.

Für alle Wellen sei die Amplitude $\hat{y} = 1$.

- Zeichnen Sie die Momentaufnahme einer Welle mit Wellenlänge 2cm, die im Nullpunkt startet.
- Zeichnen Sie ins selbe Diagramm eine Welle mit Wellenlänge 2cm, die um eine Viertel/eine halbe/eine ganze Wellenlänge nach rechts verschoben ist. Geben Sie jeweils δ und φ an.

Lösungen zu den Aufgaben:

Aufgabe 1:

Dreieck	1	2	3	4	5	6	7
Winkel/°	50	26,4	60	34,8	66,4	48,2	56,3
Seite/cm	5,3	4	4,3	5,8	4,6	2,2	3,6

Aufgabe 2:

φ in Grad	10	30	200	150	18	57,3	114,6	30
φ im Bogenmaß	0,17	$\frac{1}{6}\pi$	3,5	2,6	$0,1 \cdot \pi$	1	2	$\frac{5}{3}\pi$
$\sin \varphi$	0,17	0,5	-0,34	0,5	0,31	0,84	0,91	0,5
$\cos \varphi$	0,98	0,87	-0,93	-0,87	0,95	0,54	-0,42	0,87

Aufgabe 3:

a) $\hat{y}=1$; $T=2\pi$ b) $\omega:=\pi$ c) $\varphi = \frac{\pi}{2} / \pi / \frac{3}{2}\pi / 2\pi$

Aufgabe 3:

a) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; π

b)

• $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$

• $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$; $\frac{8}{3}\pi$

Aufgabe 4:

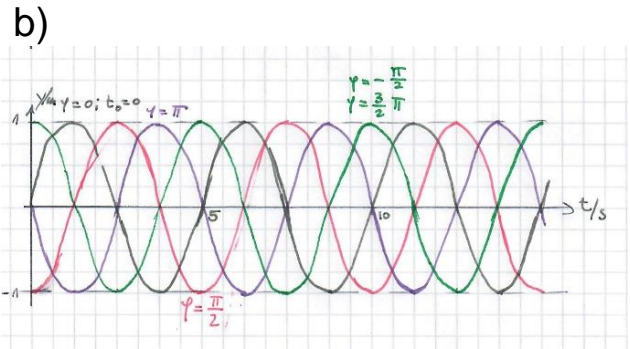
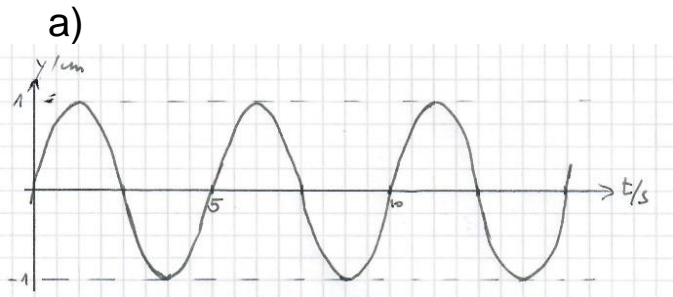
a) $T = 2 \cdot \pi s = 6,28s$; $\hat{y}=1$

b) $\omega = \pi s^{-1}$

c) Bei $\varphi=1,2,\dots$ wird die Funktion nach links verschoben. $t_0 = \frac{1}{\pi} / \frac{2}{\pi} / \dots$ bei $\varphi=-1$ ist die Verschiebung die Gleiche wie bei $\varphi=1$. Allerdings wird diesmal nach rechts verschoben

d) $\varphi = \frac{\pi}{2} / \pi / \frac{3}{2}\pi$

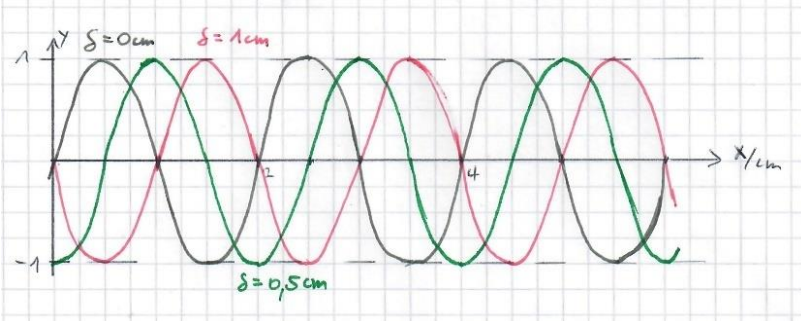
Aufgabe 5:



- c)
- Verschiebung um eine Viertel Schwingungsdauer: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $t_0 = 1,25s$
- Verschiebung um eine halbe Schwingungsdauer: $\varphi = -\pi$ $t_0 = 2,5s$
- Verschiebung um eine dreiviertel Schwingungsdauer: $\varphi = -\frac{3}{2}\pi$ $t_0 = 3,75s$

- d)
- $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $t_0 = 1,25s$
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $t_0 = -1,25s$
- $\varphi = \pi$ $t_0 = -1,5s$
- eine Schwingung, mit Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{3}{2}\pi$ ist im Diagramm identisch.
 Gleiches gilt für die Schwingungen mit Verschiebung 0 und 2π

Aufgabe 6:



- Verschiebung um eine viertel Wellenlänge: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $\delta = 0,5cm$
- Verschiebung um eine halbe Wellenlänge: $\varphi = -\pi$ $\delta = 1cm$
- Verschiebung um eine ganze Wellenlänge: $\varphi = -2\pi$ $\delta = 2cm$

Wellen, die um eine ganze Wellenlänge oder ein Vielfaches davon verschoben sind, liegen übereinander.